I4 - FISE - Statistiques - Année 2023-2024
TD de statistiques et fiabilité des systèmes n° 1
Lois de probabilités - Statistiques descriptives - Courbes de régression et corrélation

Dans ce TD tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale approchée à 10^{-3}.

Exercice n°1 : La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 15 et d'écart-type 3.
Calcule les probabilités suivantes :

1. La variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite.
   (a) Quels sont l'espérance et l'écart-type de Z ?
   (b) Représente dans un repère adapté la courbe représentative de la densité de Z.
   (c) Déduis-en la Probabilité $P(Z \geqslant 0)$.
   (d) En utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, calcule :
      i. $P(Z \leqslant 1,38)$
      ii. $P(Z \geqslant 1,38)$
      iii. $P(Z \leqslant -1)$
      iv. $P(Z \geqslant -0,8)$
      v. $P(1 \leqslant Z \leqslant 2)$
2. La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 15 et d'écart-type 3.
   (a) Représente dans un repère adapté la courbe représentative de la densité de X.
   (b) Déduis-en la Probabilité $P(X \leqslant 15)$.
   (c) En utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, calcule :
      i. $P(X \leqslant 18)$
      ii. $P(X = 18)$
      iii. $P(X < 18)$
      iv. $P(X \geqslant 18)$
      v. $P(16 \leqslant X \leqslant 17)$
      vi. $P(12 \leqslant X \leqslant 20)$

Exercice n°2 : Un acteur financier étudie les risques d'un nouvel actif financier qu'il hésite à introduire dans son portefeuille boursier. Pour ce faire, il étudie les cotations de clôture de cet actif à chaque fin de mois durant les 8 premiers mois de l'année 2017. Il prend 100 comme indice de référence pour le mois de Janvier.

Mois	Janvier	Fevrier	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août
Cotations de clôture à la fin du mois	100	107	102	106	95	88	94	88

1. Calcule la moyenne.
2. Calcule l'écart-type.
3. Dans un cours d'économie financière on peut lire :

   « *Ainsi on dit que la variance traduit la notion d'incertitude.* »

   Qu'en pensez-vous ?

Exercice n°3 : On a mesuré la durée de vie de 400 lampes fonctionnant dans un environnement radioactif.
On a obtenu les résultats suivants :

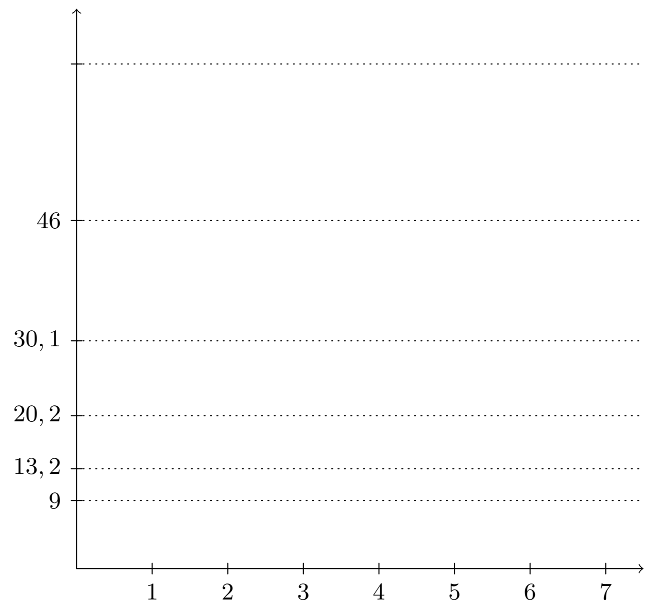
Durée de vie (en heures)	**Nombre de lampes**				**Nombres théoriques de lampes**
[300 ; 500[	52				
[500 ; 700[	130				
[700 ; 900[	148				145,6
[900 ; 1100[	59				62,8
[1100 ; 1300[	11				10,4
Total					

1. Détermine le pourcentage de lampes dont la durée de vie est strictement inférieure à 700 heures.
2. Détermine le pourcentage de lampes dont la durée de vie est supérieure à 900 heures.
3. Détermine la durée de vie moyenne de cet échantillon de lampes.
4. Détermine l'écart-type de la durée de vie de cet échantillon de lampes.
5. On suppose dans cette question que l'écart-type est 196h et la moyenne 724h, en utilisant la loi normale, complète la dernière colonne du tableau au dixième près.

Exercice n°4 : L'étude, durant les cinq dernières années, du nombre de passagers, transportés annuellement sur une ligne aérienne a conduit au tableau suivant :

Rang de l'année	1	2	3	4	5
Nombre de milliers de passagers : y_i	9	13,2	20,2	30,1	46

1. Etude des données brutes
   (a) Calcule le coefficient de corrélation de la série à deux variables $(x_i\ ,\ y_i)$.
   (b) Peut-on envisager un ajustement affine ?
   (c) Construis le nuage de points $(x_i\ ,\ y_i)$ dans le repère ci-dessous :



2. On pose $p_i = \ln(y_i)$
   (a) Recopie et complète, à 10^{-1} près, le tableau suivant :

x_i	1	...
p_i	2,2	...

   (b) Sachant que $\sigma_p \simeq 0,566$ et $\overline{xp} = 9,8$, calcule le coefficient de corrélation de la série à deux variables $(x_i\ ,\ p_i)$. La précision demandée est à nouveau à 10^{-3} près.
   (c) Peut-on envisager un ajustement affine ?

3. Pour un ajustement par la méthode des moindres carrés, quelle est la meilleure des deux séries ?

4. Détermine l'équation de la régression linéaire associée.

5. Détermine la régression exponentielle de y en fonction de x.

6. Construis la courbe de régression exponentielle dans le repère.

7. En admettant que l'évolution constatée reste la même les années suivantes, estime le nombre de passagers transportés au rang 6.

Exercice n°5 : La durée de vie d'un lave-linge (en années) peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Une étude statistique montre qu'au bout de 7 ans, 60% des lave-linges sont en état de fonctionnement.

1. Détermine la valeur du paramètre λ à 10^{-3} près.

2. Calcule la probabilité

   (a) qu'un lave-linge ait une durée de vie inférieure à 6 mois ;

   (b) qu'un lave-linge ait une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans ;

3. Calcule la demi-vie, c'est-à-dire le nombre d'années t_0 tel que $P(T < t_0) = P(T \geqslant t_0)$.

4. Calcule l'espérance de vie d'un lave-linge.

5. Dans cette question, on note $p = P(T \geqslant 10)$ et $q = 1 - p$.

   Le propriétaire d'une laverie veut installer n lave-linges et il souhaite que la probabilité d'avoir au moins un lave-linge qui dépassent 10 ans soit supérieure à 0,9. On suppose que les pannes des lave-linges sont indépendantes.

   Combien de lave-linges faut-il installer ?

I4 - FISE - Statistiques - Année 2023-2024
TD de statistiques et fiabilité des systèmes n° 2
Lois de probabilités et intervalles de confiances

Exercice n°1 : La variable aléatoire T suit une loi de Student de degré de liberté ν.

Détermine la valeur de t dans chacun des cas suivants :

a. $P(T \geqslant t) = 0,05$ sachant que $\nu = 5$
b. $P(T \geqslant t) = 2,5\%$ sachant que $\nu = 13$
c. $P(T \leqslant t) = 0,9$ sachant que $\nu = 7$
d. $P(-t \leqslant T \leqslant t) = 0,95$ sachant que $\nu = 5$
e. $P(-t \leqslant T \leqslant t) = 0,9$ sachant que $\nu = 12$
f. $P(-t \leqslant T \leqslant t) = 0,99$ sachant que $\nu = 20$
g. $P(-t \leqslant T \leqslant t) = 0,95$ sachant que $\nu = 47$

Exercice n°2 : La variable aléatoire X suit une loi du χ^2 de degré de liberté ν.

1. Détermine pour $\nu = 6$ la valeur du réel positif x tel que :
   a. $P(X \geqslant x) = 5\%$.
   b. $P(X \leqslant x) = 10\%$.
   c. $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 5\%$.
2. Détermine, pour $\nu = 10$, la probabilité : $P(X \leqslant 0)$.
3. Détermine, pour $\nu = 8$, la probabilité : $P(X \geqslant 0)$.
4. Détermine, pour $\nu = 130$, la probabilité : $P(X \leqslant 150)$.

Exercice n°3 : Quelle est la probabilité qu'un lampe fonctionne au moins 1600 heures sachant que sa durée de vie suit une loi

1. normale d'espérance 1200 heures et d'écart-type 200 heures ?
2. exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0012$

Exercice n°4 : Des vis et des rondelles de métal sont fabriquées pour s'imbriquer ensemble. Le diamètre du trou de la rondelle suit une loi normale d'écart-type 0,07 mm, alors que le diamètre de la vis suit une loi normale d'écart-type 0,05mm.

On prend une vis et une rondelle au hasard. Quelle est la probabilité que les deux ne puissent pas s'imbriquer :

a. si le diamètre moyen de la vis et celui de la rondelle sont tous deux égaux à 20mm ?
b. Si le diamètre moyen de la vis est de 19,95 mm et celui de la rondelle de 20,05mm ?

Exercice n°5 : Dans une série télévisée américaines, le héros, Rick, est piégé dans un immeuble infesté de zombies. Pour s'enfuir, il doit passer 10 portes. La probabilité qu'il rencontre un zombie en franchissant une porte est de 62%.

1. Quelle est la probabilité qu'il croise entre 4 et 6 zombies ?
2. En moyenne, combien de zombies va-t-il croiser ?

Exercice n°6 : On souhaite étudier, dans une population de grand effectif, la taille d'adolescents de 13 à 14 ans. On suppose que la variable aléatoire X donnant la taille d'un adolescent est une variable aléatoire suivant la loi Normale de moyenne μ et d'écart type σ.

1. Un échantillon est choisi au hasard dans la population et les valeurs relevées sont les suivantes :

Taille	[130 ; 135[	[135 ; 140[	[140 ; 145[	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[
Effectif	1	4	7	10	8	4	2

   a. Donne une estimation ponctuelle de la moyenne $\overline{x}$ et de la variance S^2.

   b. Détermine un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%

2. Afin d'améliorer l'estimation de la taille moyenne μ des adolescents de 13 à 14 ans, on décide d'augmenter la taille de l'échantillon. A partir de quelle effectif n_0, obtient-on un intervalle de confiance inférieur à 1 cm au seuil de confiance de 95% ?

Exercice n°1 : On admet que le diamètre d'une rondelle fabriquée par une machine outil suit une loi Normale. Cette machine a produit sur le dernier mois une grande quantité de pièces : on a prélevé 10 rondelles parmi cette population. Le diamètre moyen de cet échantillon est 2,53 cm. L'écart-type constitue une donnée constructeur, il est de 0,02 cm.

1. Au niveau 95%.
   a. Détermine un intervalle de confiance du diamètre moyen ?
   b. Quelle est l'amplitude de cet intervalle.
2. Au niveau 98%.
   a. Détermine un intervalle de confiance du diamètre moyen ?
   b. Quelle est l'amplitude de cet intervalle.
3. Gagne-t-on en précision lorsqu'on augmente le niveau de confiance ?

Exercice n°2 : Afin de mieux satisfaire leurs clients, une grande société fournisseur d'accès internet fait ses statistiques sur le nombre d'appels reçus en hotline, elle pourra ainsi évaluer le temps d'attente pour le client et le nombre d'employés à mettre au standard. Les résultats de l'enquête portent sur 24 séquences consécutives d'une minute chacune, durant lesquelles le nombre d'appels moyen a été de 6 appels par minute. On suppose que les appels sont répartis également dans le temps, que cet échantillon de 24 séquences est petit relativement aux nombre d'appels traité par ce fournisseur, et qu'il ne peut pas y avoir deux appels reçus la même seconde.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'appels reçus par minute ?
2. Pourquoi peut-on considérer que nombre d'appels moyen suit une loi normale dont on précisera les paramètres ?
3. Donne un intervalle de confiance pour le nombre moyen d'appels par minute avec un degré de confiance de 95%.

Exercice n°3 : Sur un échantillon de 400 personnes d'une population de 85 000 habitants, on sait que le taux de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de 7,5%. Donne un intervalle dans lequel on soit « sûr » à 98%, de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur toute la population.

Exercice n°4 : Le comité de conservation des rivières d'une région examine la concentration en zinc à partir de 12 échantillons prélevés sans remise dans les rivières de leur région afin de savoir si les résultats ont été modifiés depuis l'introduction d'une nouvelles lois. Ils obtiennent une moyenne de 2,6 milligrammes par litre. En supposant l'écart-type de la concentration en zinc de toutes les rivières est le même que celui trouvé l'an dernier, à savoir 0,03 mg/l.

1. Détermine un intervalle de confiance pour la concentration moyenne avec un niveau de confiance de 95%.
2. Sachant que la concentration en zinc suit une loi normale, détermine un intervalle de confiance pour la concentration moyenne avec un niveau de confiance de 95%.
3. Compare les amplitudes de ces deux intervalles de confiance. Que pense-vous de l'apport de l'information : « la concentration en zinc suit une loi normale » ?

4. Supposons que 0,03 mg/l soit un écart-type corrigé et estimé sur l'échantillon, et que la concentration de zinc suit une loi normale.

   a. Détermine un intervalle de confiance pour la concentration moyenne avec un niveau de confiance de 95%.
   b. Quel est son amplitude ?
   c. Qu'apporte la connaissance de l'écart-type ?

Exercice n°5 : Un employé responsable du contrôle de qualité des lampes électriques doit tester avec un seuil de signification de 5%, la durée moyenne théorique de 2500 heures d'une certaine marque de lampes de 60 watts. Il sait que la durée de vie de ces lampes suit une loi normale d'écart-type 55 heures. La moyenne obtenue pour un échantillon de 20 lampes est de 2479 heures. Que décidera-t-il ?

Exercice n°6 : On considère que la variable aléatoire X mesurant le chiffre d'affaires quotidien d'un hypermarché suit la loi normale de moyenne 1,5 millions d'euros et d'écart-type 0,3. La direction de cet hypermarché réalise une vaste campagne de publicité.

Les chiffres d'affaires quotidiens pendant les trente jours ouvrables qui suivent la campagne publicitaire sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Chiffre d'affaire en million d'euros	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
Nombre de jours	1	2	2	8	8	2	2	1	2	1	1

Au seuil de signification de 5%, peut-on affirmer qu'à la suite de la campagne publicitaire, la moyenne des chiffres d'affaires quotidiens a augmenté de façon significative ?

I4 - FISE - Statistiques - Année 2023-2024
TD de statistiques et fiabilité des systèmes n° 4
Tests d'hypothèses et tests du χ^2.

Exercice n°1 : Un distributeur automatique de café est construit de manière à remplir des gobelets de contenances 20 cl. Une étude faite sur 150 cafés produits par ce distributeur a prouvé que le contenu réel versé varie d'un gobelet à l'autre et qu'il peut être considéré comme une variable aléatoire distribuée selon une loi normale d'espérance 15 cl. Pour tester la validité de cette espérance, avec un seuil de signification de 5%, on a étudié un échantillon de 23 cafés. On a trouvé une moyenne de 14,2 cl, et un écart-type de 1,3 cl.

Exercice n°2 : Un manufacturier de rouleau de tapisserie effectue des essais afin de savoir si l'additif d'un certain produit réduit le temps de séchage de la colle qu'il applique à l'endos de ses rouleaux prêt-à-poser.

1. La même semaine, dans des conditions semblables, on fait l'essai de 34 pièces de tapisserie de produit original et de 42 du produit modifié.

   Le temps de séchage de produit original a été de 143 minutes avec un écart type de 30 minutes. Le temps de séchage de produit modifié a été de 125 minutes avec un écart type de 8 minutes.

   Peut-on penser, qu'au seuil de 5% d'erreur, le temps de séchage est réduit significativement par le produit modifié ?

2. La même semaine, dans des conditions semblables, on fait l'essai de 14 pièces de tapisserie de produit original et de 14 du produit modifié.

   Le temps de séchage de produit original a été de 143 minutes avec un écart type de 30 minutes. Le temps de séchage de produit modifié a été de 125 minutes avec un écart type de 36 minutes.

   On sait que le temps de séchage du produit original comme du produit modifié suivent des lois normales.

   Peut-on penser, qu'au seuil de 5% d'erreur, le temps de séchage est réduit significativement par le produit modifié ?

Exercice n°3 : Deux fournisseurs vous proposent des pièces d'un même modèle. Pour contrôler la qualité, on prélève chez chacun d'eux un échantillon de 50 pièces.

Fournisseur A

Masse des pièces (en grammes)	**Nombre de pièces**
[755 ; 765[	6
[765 ; 775[	12
[775 ; 785[	16
[785 ; 795[	11
[795 ; 805[	4
[805 ; 815[	1
Total	

Fournisseur B

Masse des pièces (en grammes)	**Nombre de pièces**
[745 ; 755[	2
[755 ; 765[	10
[765 ; 775[	14
[775 ; 785[	15
[785 ; 795[	6
[795 ; 805[	3
Total	

Peut-on estimer, au seuil de 5%, qu'il y a une différence significative entre les moyennes des masses des pièces livrées par les deux fournisseurs ?

Exercice n°4 : Le statisticien des ressources humaines étudie l'indicateur **jours de maladies et accidents du travail** du bilan social de deux filiales de sa société. Ce dernier s'analyse au regard d'un nombre de jours théoriquement travaillés :

	Filiale n° 1	Filiale n° 2
Jours maladies et accidents du travail	15176	14884
Jours travaillés	271000	244000

1. Détermine, pour chacune des filiales, le pourcentage de jours maladies et accidents du travail par rapport au nombres de jours travaillés.

2. Cette différence de pourcentages, peut-elle être considérer comme une simple fluctuation statistique avec un niveau de confiance de 0,95 ?

Exercice n°5 : Dans le T.D. n° 1, exercice n° 3, on a étudié un échantillon de 400 lampes fonctionnant dans un environnement radioactif. On a obtenu les résultats suivants :

Durée de vie (en heures)	**Nombre de lampes**	Centre des classes x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	**Nombres théoriques de lampes**
[300 ; 500[	52	400	20 800	8 320 000	44,5
[500 ; 700[	130	600	78 000	46 800 000	129,9
[700 ; 900[	148	800	118 400	94 720 000	145,6
[900 ; 1100[	59	1000	59 000	59 000 000	62,8
[1100 ; 1300[	11	1200	13 200	15 840 000	10,4
Total	400		289 400	224 680 000	393,2

Dans la dernière colonne, on a calculé les effectifs théoriques si la durée de vie de cet échantillon suivait une loi normale. Avec un seuil de signification de 5%, peut-on affirmer que la durée de vie suit une loi normale ?

Exercice n°6 : Des composants électroniques peuvent être assemblés de deux façons différentes pour produire, semble-t-il, les mêmes fonctions. Or, ces montages n'étant pas infaillibles, on a répertorié trois types de dysfonctionnement. En examinant le tableau des effectifs ci-dessous peut-on conclure à l'indépendance entre les types de dysfonctionnements et les deux techniques d'assemblages et ce, avec un seuil de signification de 5% ?

Les effectifs théoriques sont à calculer au dixième près.

	Dysfonctionnement			
	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
Assemblage 1	45	23	18	11
Assemblage 2	16	6	6	15

I4 - FISE - Statistiques - Année 2023-2024
TD de statistiques et fiabilité des systèmes n° 5
Tests du χ^2 et fiabilité des systèmes

Exercice n°1 : Une entreprise doit choisir un régime de pension parmi trois. La direction désire savoir si la préférence pour un régime est indépendante de la catégorie d'emploi au seuil de 5%. Le tableau suivant donne la répartition des régimes suivant la catégorie d'emploi d'un échantillon de 500 employés.

	Régime 1	Régime 2	Régime 3	Total
Cadres	160	140	40	
Employés payés à l'heure	40	60	60	
Total				

On veut savoir s'il y a indépendance entre la catégorie d'emploi et la préférence pour un régime. Pour ce faire vous allez faire un test du χ^2 avec un seuil de signification de 5%.

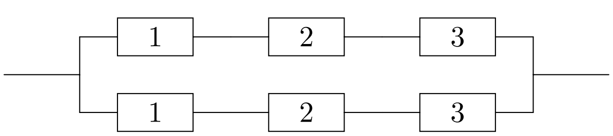
1. Reproduis et construis sur ta copie le tableau des effectifs calculés. Les effectifs seront arrondis à l'unité.
2. Calcule la statistique du test.
3. Détermine le nombre de degrés de liberté.
4. Conclure sur indépendance entre la catégorie d'emploi et la préférence pour un régime.

Exercice n°2 : Un composant électronique a une durée de vie qui est distribuée selon une loi exponentielle dont la durée de vie moyenne est de 500 heures. On désigne par T la variable aléatoire qui, à ce type de composant électronique, associe sa durée de vie avant une défaillance.

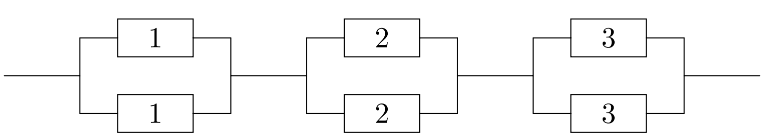
1. Quelle est la valeur du paramètre λ ?
2. Que représente ce paramètre dans ce contexte ?
3. Détermine la fonction de défaillance et la fonction de fiabilité associé à ce composant.
4. Détermine la probabilité que le composant
   a. ait une durée de vie inférieure à 250 heures ;
   b. ait une durée de vie inférieure à la durée de vie moyenne.
5. Sur 100 composants, combien auront vraisemblablement une durée de vie supérieure à 345 heures ?

Exercice n°3 : Soient deux systèmes :

- (S) :



- (P) :



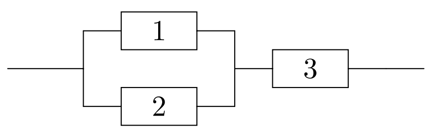
On sait que $R_1(t) = \mathrm{e}^{-0{,}9t}$, $R_2(t) = \mathrm{e}^{-0{,}95t}$, et $R_3(t) = \mathrm{e}^{-0{,}75t}$

Détermine les fonctions de fiabilité des systèmes (S) et P.

Exercice n°4 : Un avion est équipé de quatre réacteurs identiques, deux sur chaque aile. On note $R(t)$ la fiabilité d'un réacteur à l'instant t. On suppose que cette fiabilité est indépendante du nombre de réacteur en fonctionnement. La durée de vie d'un réacteur suit une loi exponentielle. Le MTBF d'un réacteur est de 1000 heures. La mission à accomplir est de 20 heures.

1. Calcule $R(20)$ à 10^{-4} près. Que représente cette probabilité ?
2. Aucune panne n'est tolérée :
   a. Les quatre réacteurs sont-ils montés en série ou en parallèles ?
   b. Détermine la probabilité d'accomplir cette mission.
3. On ne peut tolérer deux réacteurs en pannes sur la même aile :
   a. Modélise la situation.
   b. Détermine la probabilité d'accomplir cette mission.

Exercice n°5 : On étudie le système (S) suivant :

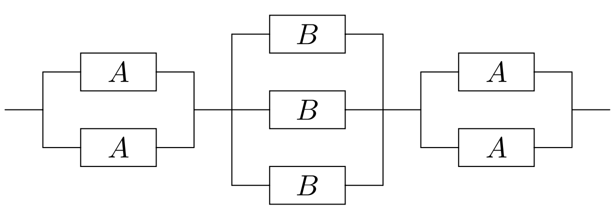


On sait la probabilité que le système

- 1 n'ait pas de défaillance avant 5 ans est égale à 0,9 ;
- 2 n'ait pas de défaillance avant 5 ans est égale à 0,92 ;
- 3 n'ait pas de défaillance avant 5 ans est égale à 0,85.

Quelle est la probabilité que le système (S) ait une défaillance avant 5 ans ?

Exercice n°6 : On considère le système S suivant :



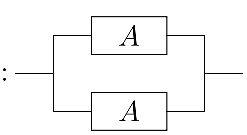
où

La fiabilité à 5 ans

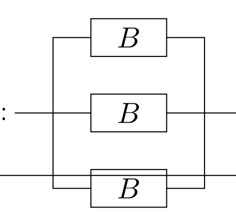
- du système A est $R_A(5) = 0,78$;
- du système B est $R_B(5) = 0,90$.

On admettra que les défaillances des composants sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la défaillance à 5 ans du système A ?
2. Détermine la valeur exacte de la défaillance à 5 ans du sous-système (H) suivant :

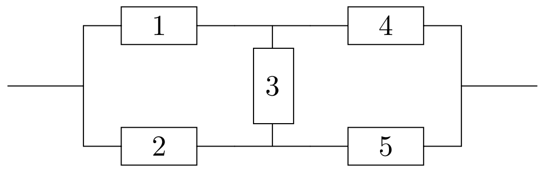


3. Détermine la valeur exacte de la fiabilité à 5 ans du sous-système (V) suivant :



4. Détermine, à 10^{-3} près, la fiabilité à 5 ans du système (S).
5. Sachant que le système B suit une loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Détermine la durée de vie moyenne du système B ?
   (b) Détermine la durée de vie médiane du système B ?

Exercice n°7 : (Difficile - hors évaluation) - On étudie le système (S) suivant :



On sait la probabilité que le(s) système(s)

- 1 ait une défaillance avant 5 ans est égale à 0,25 ;
- 2 et 3 n'aient pas de défaillance avant 5 ans est égale à 0,9 ;
- 4 et 5 n'aient pas de défaillance avant 5 ans est égale à 0,75.

Quelle est la probabilité que le système (S) n'ait pas une défaillance avant 5 ans ?